

Date of Lab 11/16/10Date of Submission 11/23/10

## Physics Laboratory Report

Title 円運動と向心力Author Class AP Name Michihito MatsugakiCo-workers Satoshi Fukushima

| Date     | Summary                                                                                                                            | Teacher               |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 11/19/10 | この実験は円運動の実験を通して、向心力を学ぶ実験であった。角速度や、回転物体の速さ、弧度法を用いたから、向心力の運動方程式、 $F=ma$ のニュートンの運動の法則も使いながら、導き出した。向心力が $F=mg(\alpha)$ と等しくなるかを調べ議論した。 | TOHEI<br>11/23<br>コノト |
|          |                                                                                                                                    |                       |
|          |                                                                                                                                    |                       |
|          |                                                                                                                                    |                       |

\* レポートは、日本語あるいは英語で記載すること。\* この用紙をレポートの表紙として使うこと。

\* 実験日から一週間目にあたる日までにレポートを提出すること。ただし、その後内容を付け加えて行っても良い。付け加えたときは、上に日付と内容を書くこと。

## 序論：

円運動は、頻繁に日常で見る運動である。例えば観覧車や、遊園地によくある乗り物も円運動に基づいている。この円運動の中で、等速で運動する事を等速円運動と呼ぶ。等速円運動に含まれている様々な事柄を、実験を通して学んだ。

目的：ある物体が等速円運動をする事によって、その物体に働く向心力が、物体の回転半径、質量、回転周期とどのような関連性があるのかを調べる。

## 理論：

- 一般的に、物体が、等速円運動をするには、円の軌道を描いている **中心方向に向かう力（向心力）** が必要である。向心力の力の大きさが一定だと、ある物体は、等速円運動を行う。向心力がなければ、直線運動になってしまうのだ。円の軌道の接線が、速度ベクトル  $V$  の向きであって、**向心力はこの速度ベクトルに対して常に垂直** である。

(図1を参照)

- 円運動の時は、ラジアンという弧度法を使う。これは、 $360$  度、つまり円の一周、を  $2\pi$  ラジアンと表す。ある  $\angle AOB$  があって、半径  $r_1$ 、 $r_2$ 、の扇形で、弧の長さが  $L_1$ 、 $L_2$  だと、相似なので、 $\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2}$  となる。よって  $\theta = \frac{L}{r}$ 。

- 等速円運動には、**周期**や**回転数**という事もおろそかにはできない。円の軌道にそって物体が一周するのに必要な時間を周期 ( $T$  秒) という。一秒間に何回転するかを回/s、Hz とあらわす。 $T = \frac{1}{n}$  が代表的な式である。 $T$  が周期で、 $n$  が一秒間の回転数なのだ。

- 次に、物体の円運動をする時の**角速度**を求めるのに、1秒の間の回転角度を使ことによって角速度がわかる。一般的に  $w$  であらわす。短い時間の間  $\Delta t$  秒で角度の変化を  $\Delta \theta$  (radian) で示すと  $w = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$  となるため、毎秒、何ラジアン動くのかというのが

わかる。さらに**一回転を  $2\pi$ 、ラジアン**と表すと、このような関係式が生まれる

$$w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n. \text{ (図2を参照). つまり、} w \text{ は1秒間にすすむ角度 (ラジアン) であ}$$

るから、一周するのにかかる  $T$  をかけると当然  $2\pi$  になるのだ。

- また**物体**がその軌道に沿って運動をしている時の**速さ**を求め出すするには半径  $r$  の円周上を  $T$  秒かかるので、**円周の長さ (一周の距離)  $2\pi r$**  で、 $T$  秒かかるがために

$$\vec{v} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r n = r w \text{ となる. (図3を参照) 1秒間に } v \text{ (m) だけ進む事と同じ.}$$

～ここまでの Check Point～

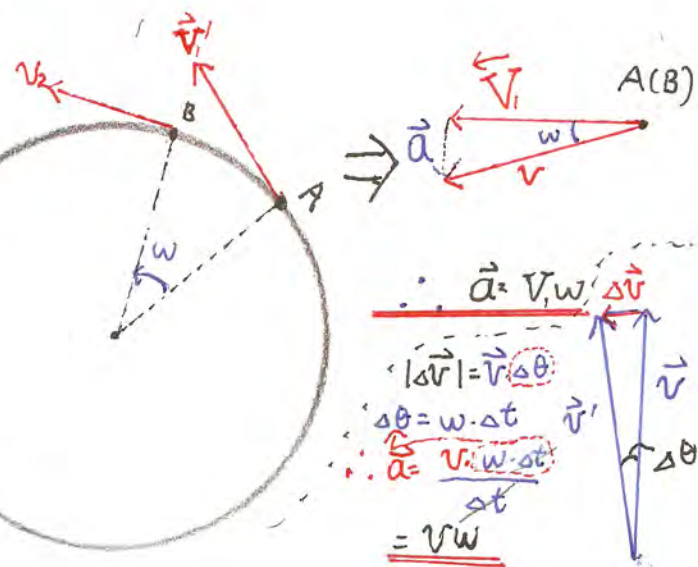
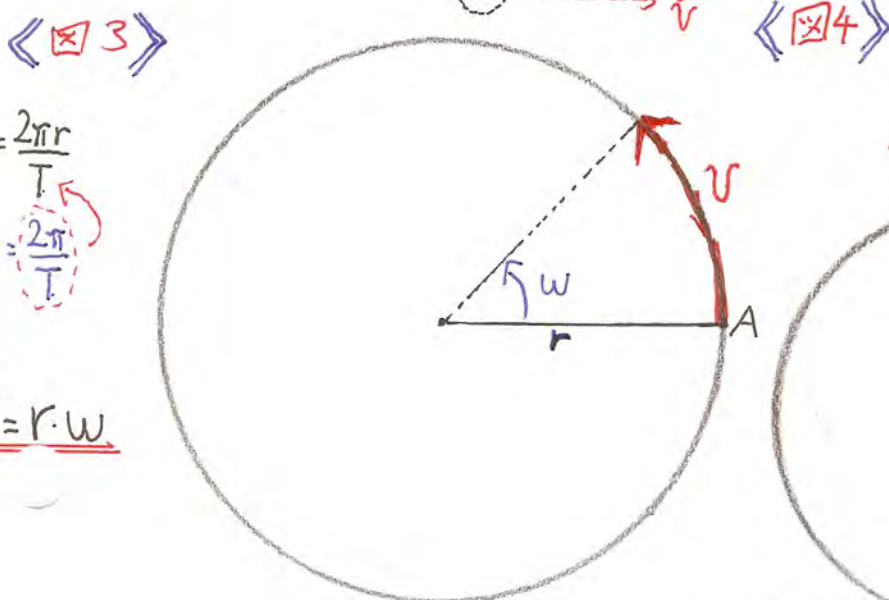
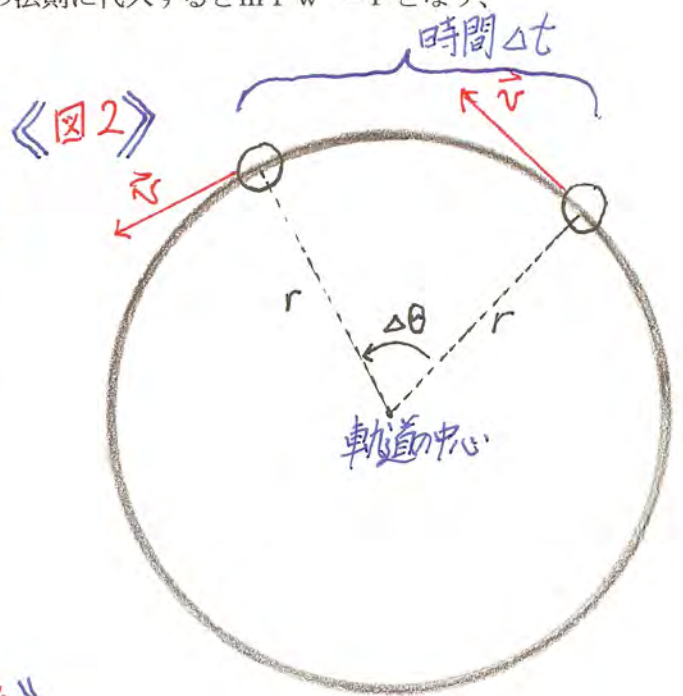
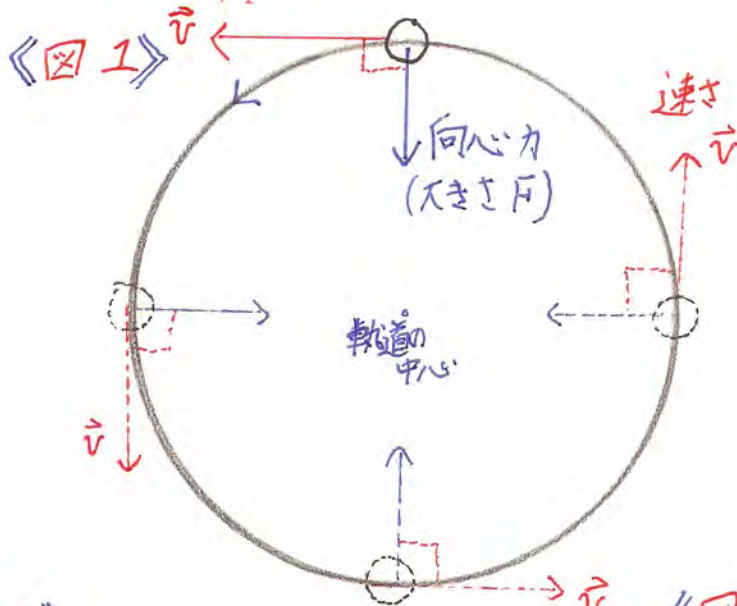
$$(2\pi) = (\text{角速度}) \times (\text{周期}) \rightarrow 2\pi = w T$$

$$(\text{円周}) = (\text{速さ}) \times (\text{周期}) \rightarrow 2\pi r = v T$$

- 等速円運動の加速度：半径  $r$  の円周上を  $V \text{ m/s}$  で、角速度が  $\omega \text{ rad/s}$  で物体が等速円運動をしている物体の加速度を  $a \text{ m/s}^2$  を  $V$  と  $\omega$  の関係で求める事ができる。加速度は定義によって  $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}' - \vec{V}}{\Delta t}$  なのだ。よって角度がもつとも小さい時に  $\Delta V$  は、常に  $v$  に垂直で円の中心を向いているのだ。つまり  $a$  もいつも  $\vec{V}$  に垂直であるので中心の方を向いている。(図4を参照) このように  $a = v \omega$  となる。これらから速さ  $v = r \omega$  の式を代入すると  $a = v \omega = r \omega^2 = \frac{v^2}{r}$  が成立する。

- 最後に等速円運動の運動方程式も導き出すことができる。どんな運動でもニュートンの運動法則はなりたつ、 $M \vec{a} = \vec{F}$  である。等速円運動の場合は、 $\vec{a}$ 、加速度が中心の方を向いていて、 $\vec{F}$  は向心力となる。加速度を運動の法則に代入すると  $m r \omega^2 = F$  となり、

$$\vec{F} = \frac{m v^2}{r} = m r \omega^2 \text{ となる。}$$



## 実験：

### 実験器具：

- 中空プラスチック管
- 糸
- ワッシャー
- ゴム栓
- ようじ
- ビニールテープ
- 天秤

### 実験方法：

中空のガラス管にナイロン糸を通して、回転する側にはゴム栓を通し、もう一方には、ワッシャーをつける。ガラス管を鉛直に持ち、ワッシャーが糸についてある所につまようじで止めておもりとみなす。これで、ゴム栓を水平に回転させる。

ワッシャーの質量を測る。

#### 1) 回転半径 $r$ と周期 $T$ の関係

回転する物体（ゴム栓1つ）と、おもりとみなすワッシャー（4つ）を一定にして、 $r$ （円周を描くための半径）を20, 30, 40, 50, 60 cmと変えながら等速円運動の20周期（20  $T$ ）の時間を測る。（ある半径を定めてからガラス管のちょっと下に目印としてビニールテープをはっておく）

#### 2) 向心力 $F$ と周期 $T$ の関係

回転半径を40 cmに保ちながら、おもりのワッシャーを5, 6, 7, 8, 9と増やした場合の20  $T$ （20周期）の時間を測定する。

3) また、全く同じ事を、回転半径が60 cmの時もする。

## 結果

ワッシャー1つの質量 = 7.0 g (M)

ゴム栓（回転物体の質量） = 2.4 g (m)

### 実験 1)

| 実験 | 合計のワッシャーの質量 (k g)<br>(M) | 回転物の質量 (k g)<br>(m)  | 半径 (m)<br>(r) | 周期 (T) (s) |
|----|--------------------------|----------------------|---------------|------------|
| 1  | $2.8 \times 10^{-2}$     | $2.4 \times 10^{-3}$ | 0.3           | 0.308      |
| 2  | $2.8 \times 10^{-2}$     | $2.4 \times 10^{-3}$ | 0.4           | 0.355      |
| 3  | $2.8 \times 10^{-2}$     | $2.4 \times 10^{-3}$ | 0.5           | 0.369      |
| 4  | $2.8 \times 10^{-2}$     | $2.4 \times 10^{-3}$ | 0.6           | 0.431      |

回転半径 (r) と周期 T の関係

| 実験 | 回転半径 (r) | $T^2$  |
|----|----------|--------|
| 1  | 0.3      | 0.0948 |
| 2  | 0.4      | 0.126  |
| 3  | 0.5      | 0.136  |
| 4  | 0.6      | 0.186  |

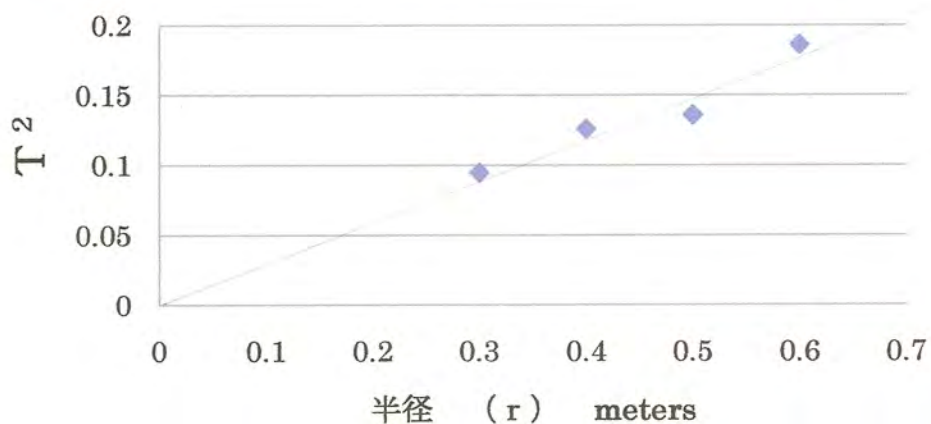
ニュートンの運動方程式  $F = ma$

円運動の基本の運動方程式は  $m r \omega^2 = F$

よって  $\omega = 2\pi/T$  だから  $m r \frac{4\pi^2}{T^2} = Mg$        $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

回転半径 (r) と周期 (T) の関係

Ex 1



「Ex 1」?

理想値と実験値 (実験1)

| 実験 | Mg (理想値) (N) | $m r \frac{4\pi^2}{T^2}$ 実験値 (N) |
|----|--------------|----------------------------------|
| 1  | 0.2786       | 0.2998                           |
| 2  | 0.2786       | 0.300                            |
| 3  | 0.2786       | 0.348                            |
| 4  | 0.2786       | 0.306                            |

理想値  
↓  
理論値  
Theoretical  
としよう

実験2)

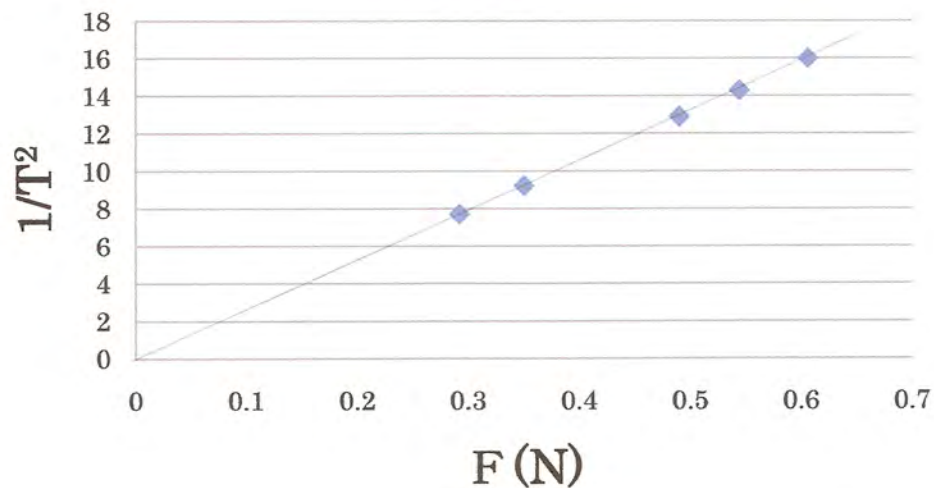
| 実験 | 合計のワッシャ<br>ーの質量 (kg)<br>(M) | 回転物の質量<br>(kg)<br>(m) | 半径 (m)<br>(r) | 周期 (T) (s) |
|----|-----------------------------|-----------------------|---------------|------------|
| 1  | $2.8 \times 10^{-2}$        | $2.4 \times 10^{-3}$  | 0.4           | 0.360      |
| 2  | $3.5 \times 10^{-2}$        | $2.4 \times 10^{-3}$  | 0.4           | 0.329      |
| 3  | $4.2 \times 10^{-2}$        | $2.4 \times 10^{-3}$  | 0.4           | 0.278      |
| 4  | $4.9 \times 10^{-2}$        | $2.4 \times 10^{-3}$  | 0.4           | 0.264      |
| 5  | $5.6 \times 10^{-2}$        | $2.4 \times 10^{-3}$  | 0.4           | 0.250      |

ニュートンの運動方程式  $F = ma$ 円運動の基本の運動方程式は  $m r \omega^2 = F$ よって  $\omega = 2\pi/T$  だから  $m r \frac{4\pi^2}{T^2} = F$ 

向心力Fと周期Tの関係

| 実験 | 向心力F(N) | $(1/T^2)$ |
|----|---------|-----------|
| 1  | 0.292   | 7.72      |
| 2  | 0.350   | 9.24      |
| 3  | 0.490   | 12.9      |
| 4  | 0.544   | 14.3      |
| 5  | 0.606   | 16        |

## 向心力 (F) と周期 (T) の関係 E x 2



理想値と実験値 (実験 2)

| 実験 | $Mg$ (理想値) (N) | $m r \frac{4\pi^2}{T^2}$ 実験値 (N) |
|----|----------------|----------------------------------|
| 1  | 0.279          | 0.292                            |
| 2  | 0.343          | 0.350                            |
| 3  | 0.411          | 0.490                            |
| 4  | 0.480          | 0.544                            |
| 5  | 0.549          | 0.606                            |

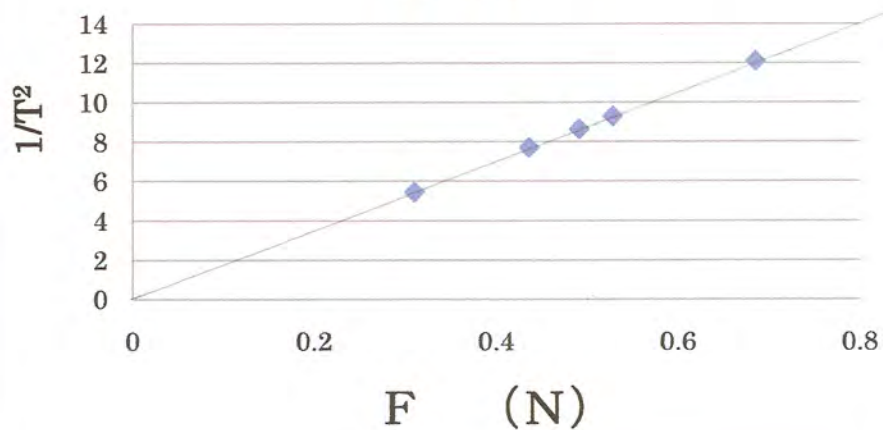
実験 3)

| 実験 | 合計のワッシャーの質量 (kg)<br>(M) | 回転物の質量 (kg)<br>(m)   | 半径 (m)<br>(r) | 周期 (T) (s) |
|----|-------------------------|----------------------|---------------|------------|
| 1  | $2.8 \times 10^{-3}$    | $2.4 \times 10^{-3}$ | 0.6           | 0.428      |
| 2  | $3.5 \times 10^{-3}$    | $2.4 \times 10^{-3}$ | 0.6           | 0.360      |
| 3  | $4.2 \times 10^{-3}$    | $2.4 \times 10^{-3}$ | 0.6           | 0.340      |
| 4  | $4.9 \times 10^{-3}$    | $2.4 \times 10^{-3}$ | 0.6           | 0.328      |
| 5  | $5.6 \times 10^{-3}$    | $2.4 \times 10^{-3}$ | 0.6           | 0.288      |

向心力Fと周期Tの関係

| 実験 | 向心力F(N) | (1/T <sup>2</sup> ) |
|----|---------|---------------------|
| 1  | 0.310   | 5.46                |
| 2  | 0.436   | 7.72                |
| 3  | 0.491   | 8.65                |
| 4  | 0.528   | 9.30                |
| 5  | 0.685   | 12.1                |

向心力 (F) と周期 (T) の関係  
E x 3



理想値と実験値 (実験 3)

| 実験 | Mg (理想値) (N) | $m r \frac{4 \pi^2}{T^2}$ 実験値 (N) |
|----|--------------|-----------------------------------|
| 1  | 0.2744       | 0.310                             |
| 2  | 0.343        | 0.436                             |
| 3  | 0.411        | 0.491                             |
| 4  | 0.480        | 0.528                             |
| 5  | 0.549        | 0.685                             |

## 考察

理想値と実験値を見た結果場合によってやや大きな差が生じた。

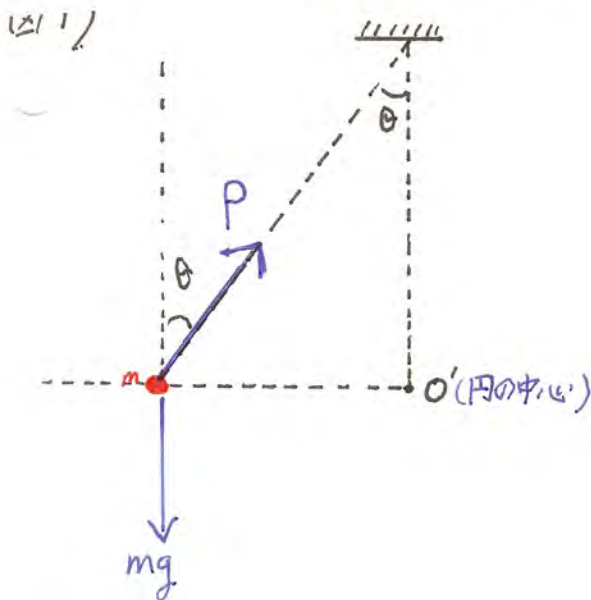
大きな誤差が生じた理由：

- この場合誤差が微小でないため正確な質量がだされていないというのは、理由にはあまりならない。
- また、糸が古くてピンと張った糸を利用しなかったというのも本当のごく一部である。
- 20Tをストップウォッチで測る時に正確なタイムを出す事が出来なかったかもしれないが、3回づつ念を入れて測ったので、あまり関係ないと思う。

では、どこで生じたのか？

- 主に考えられる理由は、中空ガラスをもちながらナイロン糸を回す時の回し方がかなりずれていたのかもしれない。本来水平で、一定の状態を20T間維持しなければならない。だが、これを維持するのは、かなり難しい事である。一定の場所を維持して20Tの間を維持することが出来なかつ事が原因である。ずれるという事は、つまり角度の問題が関わってくるのだ。
- 円錐運動が生じてしまったのではないか。これは、誤差が本当に小さくとも言える事である。下の図を参考してみよう。

ずれていた  
「角度」と  
表に示そう



図から、円運動の中心  $O'$  に向かう力は

$P \sin \theta$  である。 $O'$  の方向に加速度  $a_c$  が存在する。円錐運動では、鉛直方向に、物体  $m$  は上、下、には移動しないから力はつり合っているのだ。

∴ だから鉛直方向の力のつり合いは、

$$P \cos \theta = mg$$

$$\Rightarrow P = \frac{mg}{\cos \theta} \text{ になる。}$$

よって円錐運動の円の中心  $O'$  に向かう力、  
向心力は  $F = P \sin \theta = \frac{mg}{\cos \theta} \cdot \sin \theta = \underline{\underline{mg \tan \theta}}$   
となる。

図2)

図2)

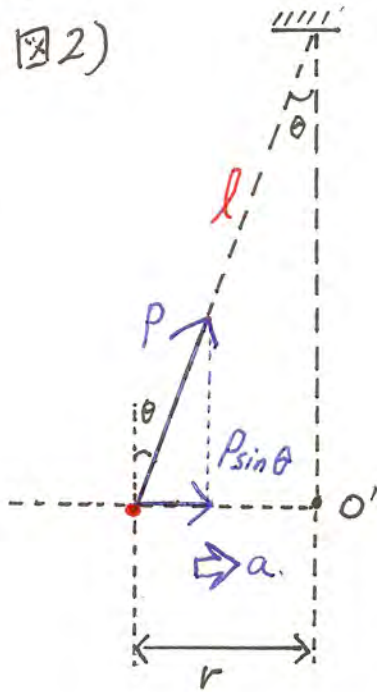


図1から 向心力が分かった事から  
周期も分かるのだ。

図2から、半径が  $r = l \sin \theta$  で  
向心力が  $P \sin \theta = mg \tan \theta$  の円運動  
と同様である。

よって、Newtonの運動方程式に従うと

$$F = ma$$

つまり、  $ma = mg \tan \theta$  (向心力)

円運動の加速度  $a$  は;

$$a = r\omega^2 = l \sin \theta \cdot \omega^2$$

これを代入すると

$$m \cdot l \sin \theta \cdot \omega^2 = mg \tan \theta \quad \text{となる}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}}$$

$\omega T = 2\pi$  であるから、

$T = \frac{2\pi}{\omega}$  で、  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$  になる

→ 円錐運動の様に回してしまうと上の様に、式も変形されてしまうことが  
分かる。角度があると、「円運動」と考えるのに、角度の重大性が生じる。  
だから、数値を素直に式にあてはめても本当の向心力や周期が求まらないのだ。  
したがって、上の様に従う、正確な結果が出るのだ。このように、この円錐運  
動が原因で大きな誤差が生じたのだ。

### 考察続き

では、なぜガラス管の下（糸）におもりをつけたのか？という疑問が頭にふと出た。

それは、ゴム栓がふっとばないためであると友達があっさりと返答してきた。  
さらに疑問に思ったのは、おもりをつける事によってどうして吹っ飛ばないのか？

それは、おもりがなければ重力をかけても物体がないためFは、0になるか、糸を含めると、とても小さいFとなる。これによって、向心力は働かなくなる。向心力がなければ糸につながられているゴム栓は、直線運動をしようとし、きれいな円運動ができなくなるのだ。 $Mg$ と $m r (4 \pi^2 / T^2)$ がつりあっている事によってガラス管の少し下に印をつけた位置が一定に保たれるのである。逆におもりが多すぎて $Mg$ が偏って重くなるとしたにズルズルと引っ張られてしまう。このように、おもりをつけるのは、水平に円運動を行わせるために、 $Mg$ と $m r (4 \pi^2 / T^2)$ をつりあう様にさせるためである。

### 結論

この実験を通して、向心力という円運動ととても関係が深いことを学んだ。水平にゴム栓を回していき、その20T（円運動）を測ったのだ。これによって、向心力や、ニュートンの運動方程式が成り立つかを、調べた。誤差が小さい場合は、かなり正確にゴム栓の一定の回し方を維持できた事をしめすことができた。だが、誤差が大きい場合は、水平の円運動が、円錐運動になってしまった事が予測できた。円錐運動でも、事柄は同じで、角度を考慮することによって、円運動の様に考える事が可能になる。

又、このラプで周期と回転数の関係や、角速度とある物体が円運動する時の速さとの違いや、加速度が円運動の中心に加速していくことなどが、この実験に含まれていた。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n, \quad v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r n = r\omega, \quad a = v\omega = r\omega^2 = \frac{v^2}{r},$$

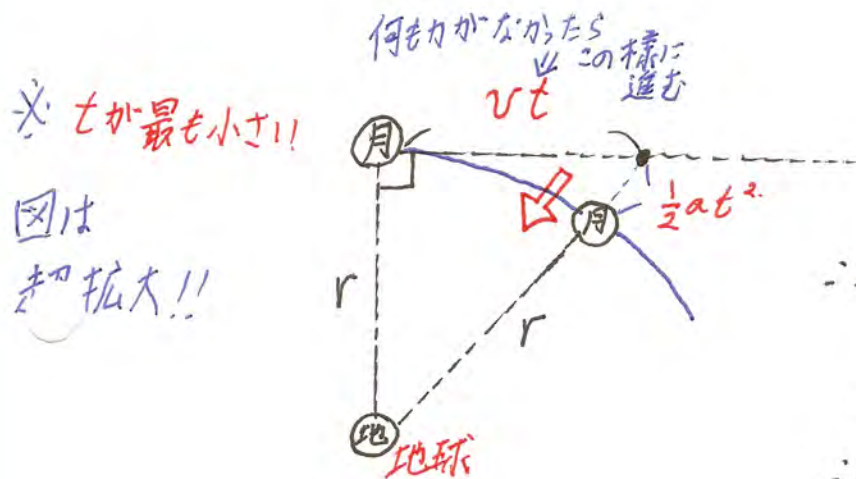
$$F = \frac{mv^2}{r} = m r \omega^2 \quad \text{などの使い方や、由来も学んだ。これらの式を学んだ上で}$$

$$m r \frac{4\pi^2}{T^2} = Mg, \text{これが成り立つのかを確かめるのが目的だったのだ。多少な誤差は、}$$

生じたが、完璧な実験はむりなので、誤差の理由も今までの知識を用いて、考えたのだ。

## 感想

遊園地の乗り物などが、円運動ととても関係が深かったことに驚いた。それに、地球を公転している月の事を考えてみた。月が地球の中心を中心として、円運動をしていることに気づいた。なぜ月の事をおもったかというと“小さい時に月は落ちているのだ”と言われたことがあるのが、とても印象的だったからである。円運動を学んで、月は下の様な理由で、“月は、加速度があることによって中心に落ち込む”ことがわかった。とてもおもしろく感じる事が出来、一人で感動してしまいました。それでもまだ、いろいろと遊園地の乗り物には、まだ勉強をしていない遠心力、慣性力なども含まれ、それらを近い将来学ぶと、さらに理解が深まり“現実的”に面白く感じる事ができると思う。



三平方の定理によって

$$r^2 + (vt)^2 = (r + \frac{1}{2}at^2)^2$$

$$\therefore \cancel{r^2} + v^2t^2 = \cancel{r^2} + rat^2 + \frac{1}{4}a^2t^4$$

$\approx 0$

$$v^2t^2 = rat^2$$

$$\therefore a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

↓↓  
「中心に落ち込む」

- ・ 2.1.1 に 実施しています。
- ・ 理論値と実験値(実験値という)の差(%エラー)を 表に示すと良い。
- ・ 円錐運動の議論は良いが、では どの程度円錐 だったのだろうか?  
(実験値から 円錐の角度がわかる?)
- ・ レポートでは、何がわかるか? 何が かわらなかつたか? 書くといい。 論旨から 外れる式などは「付録」として最後に書くこと。