

静止衛星打ち上げの計算

12-02-2016 revised
Tohei Moritani

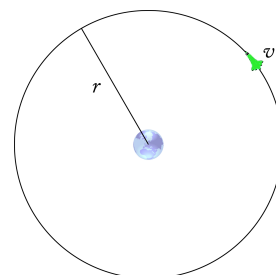
Universal Gravitational Constant	万有引力定数	$G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
Mean Radius of the Earth	地球の半径の平均値	$R_E = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$
Mass of the Earth	地球の質量	$M_E = 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$

1. 円軌道の半径と速さ

地球を中心とする半径 r の円軌道上の人工衛星の速さ v は、

$$G \frac{m M_E}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad \text{より} \quad (1)$$

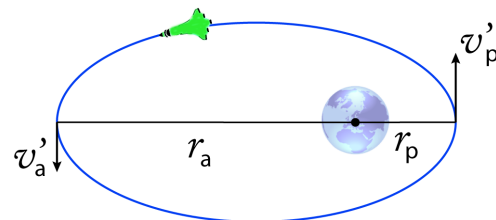
$$v = \sqrt{\frac{G M_E}{r}} = \frac{1.9964 \times 10^7}{\sqrt{r}} \quad (2)$$



* 速さ v は円軌道半径 r のみで決まり $\sqrt{r}$ に反比例する。

2. 楕円軌道の近地点、遠地点での速さ

地球を焦点の一つとする楕円軌道上の近地点(p, perihelion)、遠地点(a, aphelion)での衛星の速さ v'_p 、 v'_a と地球からの距離、 r_p 、 r_a の関係は次の 2 式を連立して求められる。



$$\text{ケプラーの第二法則} \quad \frac{1}{2} r_p v'_p = \frac{1}{2} r_a v'_a \rightarrow v'_a = \frac{r_p}{r_a} v'_p \quad (3)$$

$$\text{力学的エネルギー保存則} \quad \frac{1}{2} m v_p'^2 - G \frac{m M_E}{r_p} = \frac{1}{2} m v_a'^2 - G \frac{m M_E}{r_a} \quad (4)$$

$$(3), (4) \rightarrow \left(1 - \frac{r_p^2}{r_a^2}\right) v_p'^2 = 2 G M_E \left(\frac{r_a - r_p}{r_p r_a}\right)$$

$$v_p' = \sqrt{\frac{2 G M_E r_a}{r_p (r_p + r_a)}} = 2.823 \times 10^7 \sqrt{\frac{r_a}{r_p (r_p + r_a)}} \quad [\text{m/s}] \quad (5)$$

$$v_a' = \frac{r_p}{r_a} v_p' = 2.823 \times 10^7 \sqrt{\frac{r_p}{r_a (r_p + r_a)}} \quad (6)$$

* 近地点、遠地点での速さの比は、地球中心からの距離の逆比である（ケプラーの第 2 法則）

* 近地点、遠地点の地球中心からの距離、 r_p 、 r_a 、からそれぞれの地点の速さ v'_p 、 v'_a は、(5)、(6)により得られる。

3. 楕円軌道と円軌道

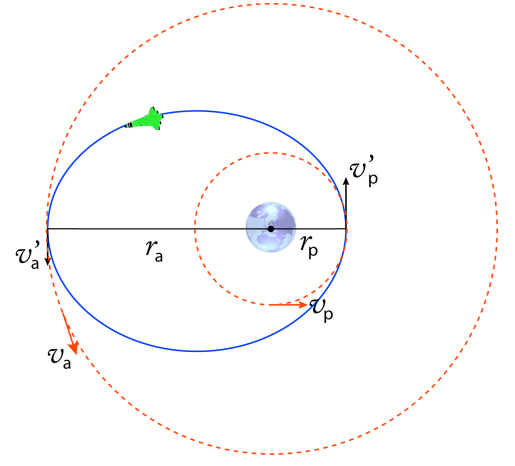
半径 r_p 、 r_a の円軌道上の人工衛星の速さ v_p 、 v_a は、(2)より

$$v_p = \sqrt{\frac{G M_E}{r_p}} \quad v_a = \sqrt{\frac{G M_E}{r_a}} \quad \text{であるから}$$

(5),(6)は次式でも表される。

$$v'_p = \sqrt{\frac{2 r_a}{r_p + r_a}} v_p \quad (7)$$

$$v'_a = \sqrt{\frac{2 r_p}{r_p + r_a}} v_a \quad (8)$$



(7)式は、半径 r_p の円軌道を運動する人工衛星が r_a を遠地点とする楕円軌道に入るために変更すべき速度、 v_p 、を与える。その逆に、楕円軌道の近地点、 r_p 、にいる人工衛星が半径、 r_p 、の円軌道に入るために変更すべき速度は v_p である。

同様に、(8)式は、遠地点、 r_a 、での楕円軌道と円軌道の転換をするときの速度の関係を示す。

4. 静止衛星軌道の諸量

$$\text{静止衛星軌道での 周期} \quad T_{\text{sync}} = 24.00 \text{ hr} = 86400 \text{ s} \quad (9)$$

$$\text{静止衛星軌道の 軌道半径は} \quad G \frac{m M_E}{R^2} = m R \left(\frac{2\pi}{T_{\text{sync}}} \right)^2 \text{ より}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{G M_E T_{\text{sync}}}{4\pi^2}} = 42.24 \times 10^6 \text{ m} \quad (10)$$

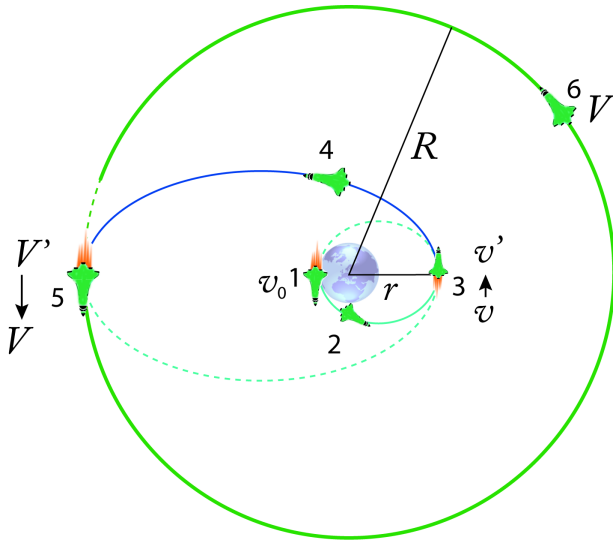
$$\text{静止衛星円軌道での速さ } V \text{ は(2)より} \quad V = \sqrt{\frac{G M_E}{R}} = 3.072 \text{ km/s} \quad (11)$$

$$\text{重力加速度} \quad g'_{\text{sync}} = \frac{G M_E}{R^2} = 0.223 \text{ m/s}^2 \quad (12)$$

5. 静止衛星打ち上げのプロセス

次の3段階で実施することを想定した

- 第1楕円軌道で地上高度 200 km まで上げる (図の 1 ~ 3)
- ここで加速し(3)、第2楕円軌道で静止衛星軌道高度まで飛行 (図の 3 ~ 5)
- 静止衛星軌道高度で加速し円軌道とする (図の 5 ~ 6)



v_0 : 地上打ち上げ速さ

r : 地上高度 200 km の地球の中心からの距離

v : 地上高度 200 km での速さ (加速前)

v' : 第2楕円軌道に入るための地上高度 200 km での加速後の速さ

R : 静止衛星軌道の円の半径

V' : 第2楕円軌道の遠地点での速さ

V : 静止衛星軌道での速さ

6. 地上での打ち上げ

地上高度 200 km に上げるための打ち上げ速さ v_0 を求める。

$$\begin{aligned} \text{第1楕円軌道の短地点までの距離} &= \text{地球の半径} = R_E = 6.371 \times 10^6 \text{ m} \\ \text{第1楕円軌道の遠地点までの距離} &= r = R_E + 0.200 \times 10^6 = 6.571 \times 10^6 \text{ m} \end{aligned} \quad (13)$$

$$(5) \text{より、} \quad \text{地上打ち上げ速さ} \quad v_0 = 7.97_0 \text{ km/s} \quad (14)$$

第1宇宙速度、7.9 km/s、よりわずかに大きい速さである。

$$(6) \text{より、} \quad \text{200 km 到達時の速さ} \quad v = 7.72_8 \text{ km/s} \quad (15)$$

7. 第2楕円軌道

$$\text{第2楕円軌道の短地点までの距離} = r = R_E + 0.200 \times 10^6 = 6.57_1 \times 10^6 \text{ m} \quad (16)$$

$$\text{第2楕円軌道の遠地点までの距離} = R = 42.2_4 \times 10^6 \text{ m} \quad (17)$$

v' 、と遠地点での速さ V' 、は、(7)と(8)より

第2楕円軌道の近地点（地上 200 km 高度）での速さ

$$v' = \sqrt{\frac{2 G M_E R}{r (R+r)}} = 2.823 \times 10^7 \sqrt{\frac{R}{r (r + R)}} = 10.2_4 \text{ km/s} \quad (18)$$

$$\text{第2楕円軌道の遠地点での速さ} \quad V' = \frac{r}{R} v' = 1.59_4 \text{ km/s} \quad (19)$$

8. 静止衛星軌道

第2楕円軌道から静止衛星軌道に入るための速さの比

$$\frac{v}{v'} \left(= \sqrt{\frac{R+r}{2r}} \right) = 1.92 \quad (20)$$